2.4.1 Funkce absolutní hodnota

Předpoklady: 1208, 2107

$|x|$ - zničí znaménko čísla, všechna čísla změní na nezáporná

Jak vyjádřit matematicky?

- **Pomocí číselné osy:**
  $|x|$ je vzdálenost obrazu čísla na číselné ose od počátku.
- **Pomocí rovností:**
  $x \in (-\infty; 0\rangle \Rightarrow |x| = -x$ (zápornému číslu absolutní hodnota změní znaménko)
  $x \in \langle 0; \infty) \Rightarrow |x| = x$ (s kladným číslem nic nedělá)
- **Pomocí mocniny:**
  $|x| = \sqrt{x^2}$ ($\Rightarrow \sqrt{x^2} \neq x$, protože umocněním ztratím znaménko)

Př. 1: Rozhodni zda z pravidla „$x \in (-\infty; 0\rangle \Rightarrow |x| = -x$“ vyplývá, že absolutní hodnota je pro některá čísla záporná.

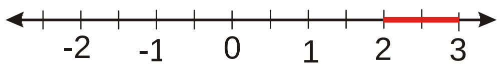
$x \in (-\infty; 0\rangle \Rightarrow |x| = -x$ neznamená, že $|x|$ je záporná

Naopak například pro $x = -2$ platí $|x| = -x \Rightarrow |-2| = -(-2) = 2$ $\Rightarrow$ mínus dělá ze záporných čísel čísla kladná,

Pravidla pro výpočty s absolutní hodnotou:

$|a| \geq 0$ $\qquad |a| = |-a|$ $\qquad |ab| = |a| \cdot |b|$ $\qquad b \neq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

Jde určit pomocí absolutní hodnoty i vzdálenost obrazů čísel od sebe navzájem (nejenom obrazu čísla od nuly)?
Zkusíme vzdálenost obrazů čísel 2 a 3.

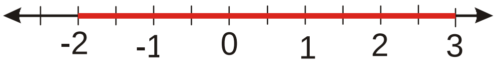


$\Rightarrow$ Vzdálenost jejich obrazů na číselné ose je 1.
Zkusíme vzdálenost spočítat pomocí absolutní hodnoty: $1 = 3 - 2 = |3 - 2|$ a $1 = |-1| = |2 - 3|$
$\Rightarrow$ zřejmě stačí spočíst rozdíl čísel a udělat z něj absolutní hodnotu (aby nezáleželo na pořadí při odčítání).

Jak s tím souvisí pravidlo, že $|x|$ je vzdálenost obrazu čísla x od počátku?
Zřejmě $|x| = |x - 0| = |0 - x| = |-x|$ $\Rightarrow$ opět absolutní hodnota z rozdílu dvou čísel.

Hypotéza: Absolutní hodnota z rozdílu dvou čísel $|a - b|$ se rovná vzdálenosti jejich obrazů na číselné ose.

Př. 2: Ověř, že hypotéza platí i pro čísla 3 a –2.

Čísla 3 a –2 $\Rightarrow$ 

$\Rightarrow$ vzdálenost obrazů je 5.

Spočítáme absolutní hodnoty z rozdílů:

- $\left|3-(-2)\right| = |3+2| = 5$
- $|-2-3| = |-5| = 5$.

Hypotéza platí i pro čísla 3 a –2.

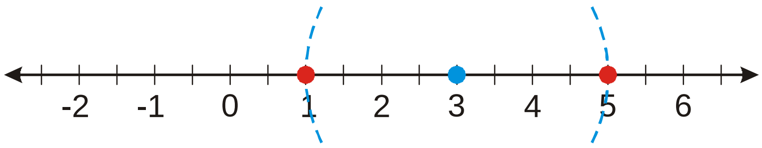
Pedagogická poznámka: Pokud příklad počítáme ve třídě, dostává minimálně každá řada jiné zadání - například dvojice –2, 3 a –4, -6.

Matematický důkaz jsme neprovedli, ale hypotézu budeme brát za dokázanou.

Absolutní hodnota z rozdílu dvou čísel $|a-b|$ se rovná vzdálenosti jejich obrazů na číselné ose.

Př. 3: Vyřeš rovnici $|x-3| = 2$.

$|x-3| = 2 \Leftrightarrow$ hledáme čísla vzdálená od 3 o 2.

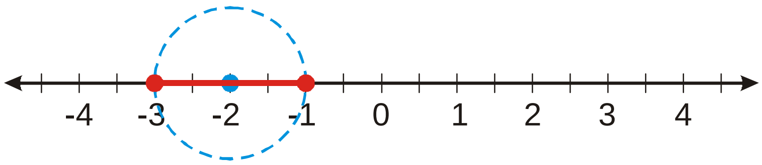


$K = \{1;5\}$

Př. 4: Vyřeš nerovnici $|x+2| \le 1$.

Pokud chceme použít pravidlo pro vzdálenost, musíme uvnitř absolutní hodnoty vytvořit rozdíl: $|x+2| = \left|x-(-2)\right|$

$\left|x-(-2)\right| \le 1 \Leftrightarrow$ hledáme čísla vzdálená od -2 o 1 nebo méně.

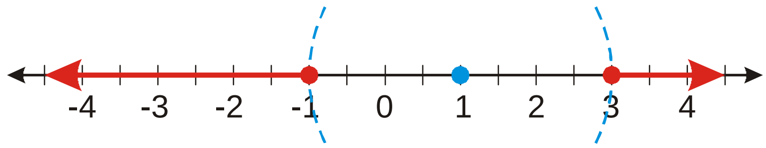


$K = \langle -3;-1 \rangle$

Př. 5: Vyřeš nerovnici $|1-x| > 2$.

V absolutní hodnotě máme rozdíl, ale x je až druhé.
Naštěstí to nevadí (zkoušeli jsme při odvozování pravidla, že na pořadí v rozdílu nezáleží), navíc platí $|a| = |-a|$ a tedy $|1-x| = \left|-(1-x)\right| = |x-1|$

$|1-x| > 2 \Leftrightarrow$ hledáme čísla vzdálená od 1 více než o 2.



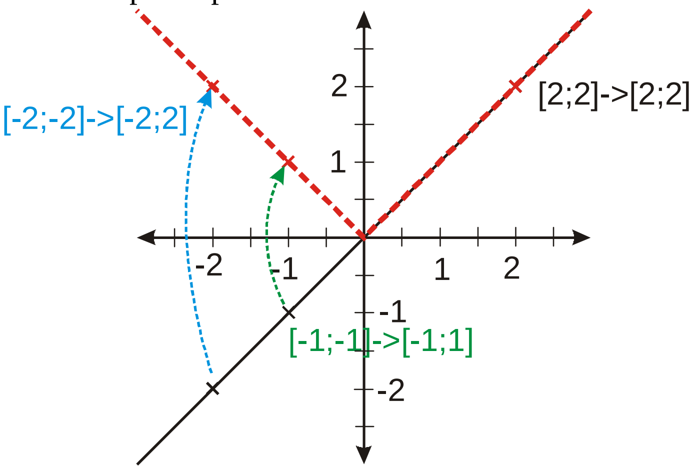
$K = (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$

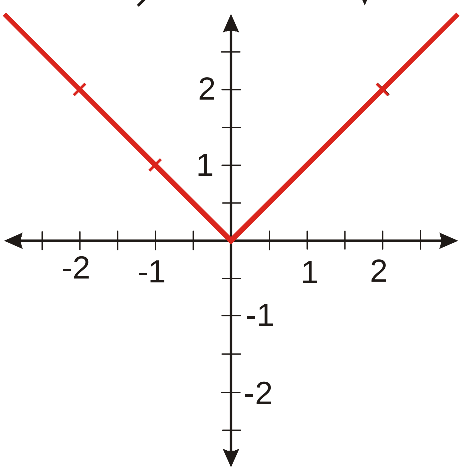
Pedagogická poznámka: Na objevování grafu funkce $y = |x|$ je potřeba minimálně 10 minut, spíše čtvrt hodiny. Obě metody, které používáme, budeme potřebovat v dalším studiu velice často a je nutné, aby je studenti měli možnost alespoň částečně pochopit už teď na nejjednodušším příkladě.

Jak vypadá graf funkce $y = |x|$?
Zjistíme to bez tečkování:

1. pomocí grafu funkce $y = x$.
Co dělá absolutní hodnota s dosazenými čísly (s *y*-ovými souřadnicemi funkce $y = x$)?

- Kladné nemění $\Rightarrow$ body nad osou *x* (kladná hodnota *y*) zůstanou.
- Záporné změní na kladné $\Rightarrow$ body pod osou *x* (záporná hodnota *y*) změní na body s kladnou *y*-ovou souřadnicí ($[-1;-1] \Rightarrow [-1;1]; [-2;-2] \Rightarrow [-2;2]$) $\Rightarrow$ levá část grafu se překlopí nad osou *x*.



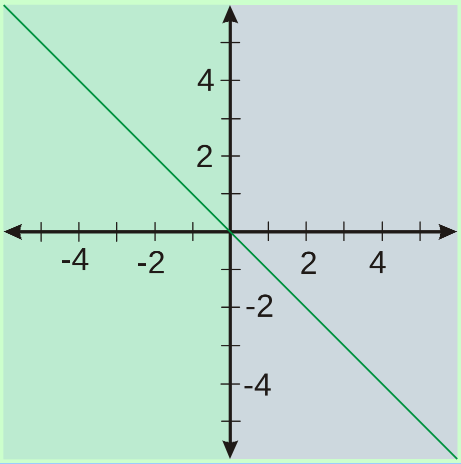


2. pomocí odstraňování absolutní hodnoty

Podle předpisu na začátku kapitoly se zbavíme absolutní hodnoty a získáme lineární funkci pro část definičního oboru. Tyto částečné funkce spojíme na výsledek.
Při odstraňování záleží, zda je *x* kladné nebo záporné.

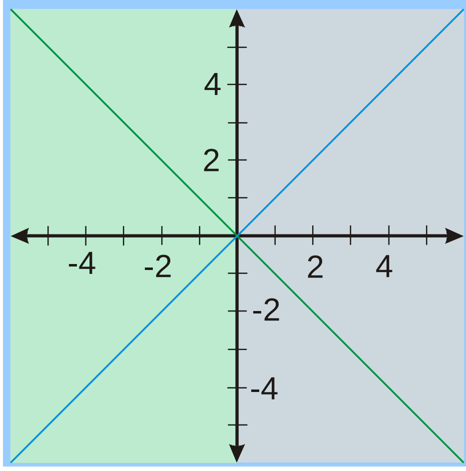
1) $x \in (-\infty; 0\rangle$, část obrázku nalevo od osy *y*

$x < 0 \Rightarrow |x| = -x \;\Rightarrow\; y = |x| = -x$

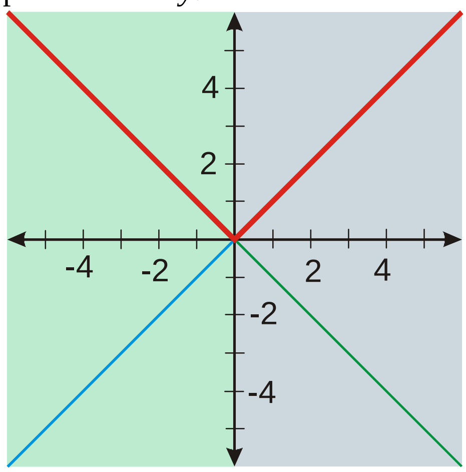


2) $x \in \langle 0; \infty)$, část obrázku napravo od osy *y*

$x > 0 \Rightarrow |x| = x \;\Rightarrow\; y = |x| = x$



V levé (zelené) části vytáhneme zelenou a v pravé (modré) modrou čáru. Obě čáry by se měly potkat na ose *y*.



Stejný výsledek – zřejmě jsme postupovali správně.

Př. 6: Rozhodni, jak by se vlastnosti absolutní hodnoty měly projevit na jejím grafu. Proveď kontrolu získaného grafu funkce $y = |x|$. Můžeme po těchto kontrolách považovat obrázek za jistě správný?

Vlastnosti absolutní hodnoty by se na grafu měly projevit takto:

- v bodě $x = 0$ musí platit $y = 0$ (obraz nuly leží v počátku a má od něj tedy nulovou vzdálenost),
- všechny hodnoty funkce musí být nezáporné (platí $|a| \geq 0$),
- funkce musí mít pro navzájem opačná čísla stejné hodnoty (platí $|a| = |-a|$),
- funkce musí růst jako funkce $y = x$, protože takto roste vzdálenost bodů od počátku.

Získaný graf všechny tyto požadavky splňuje, přesto ho nemůžeme považovat za jistě správný, existuje mnoho jiných grafů, které všechny uvedené požadavky splňují a nejsou grafy funkce $y = |x|$.

Poznámka: Předchozí odstavec nijak nesnižuje důležitost podobných kontrol při řešení libovolného problému. Naopak schopnost průběžné kontroly je velmi důležitá.

Shrnutí: Funkce absolutní hodnota se v různých částech definičního oboru chová různě, graf má tvar písmene V.